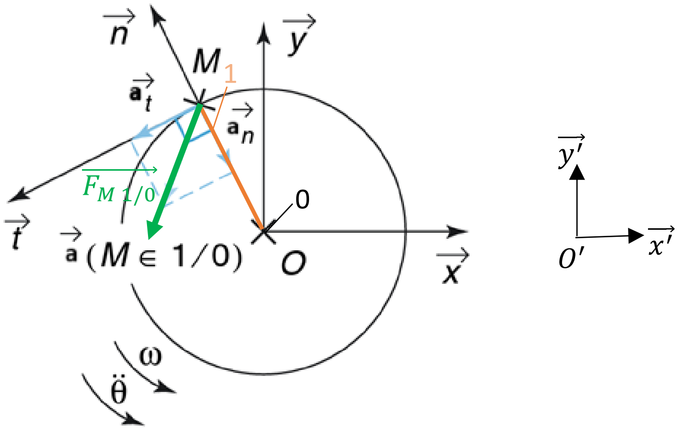
(Remarque : Les démonstrations ne sont pas à mémoriser mais les lois doivent l'être)

Prenons un mouvement de rotation à vitesse angulaire uniformément varié dans le repère (O,x,y) et en translation par rapport à un repère extérieur (O',x',y'). (Roue de vélo p.e).



Si 0 est en translation par rapport à (O',x',y') et 1 en rotation par rapport à (O,x,y), on peut écrire $\overrightarrow{v_{M \in 1 \to 0'}} = \overrightarrow{v_{M \in 1 \to 0}} + \overrightarrow{v_{0 \in 0 \to 0'}}$.

Comme 1 est en rotation par rapport à 0,

$\overrightarrow{v_{M \in 1 \to 0}} = \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{\omega_{1/0}} = \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{n}$ $\overrightarrow{v_{M \in 1 \to 0}} = \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge R \cdot \vec{n}$

(on retrouve $v = \omega \cdot R$).

Si il n'y a pas de translation par rapport à (O',x',y'), $\overrightarrow{v_{0 \in 0 \to 0'}} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{a_{M \in 1 \to 0}} = \frac{d\overrightarrow{v_{M \in 1 \to 0}}}{dt} = \frac{d(\omega \cdot \vec{z} \wedge R \cdot \vec{n})}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{z} \wedge R \cdot \vec{n} + \omega \cdot \vec{z} \wedge R \cdot \frac{d\vec{n}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_{M \in 1 \to 0}} = R\frac{d\omega}{dt}(\vec{z} \wedge \vec{n}) + \omega \cdot \vec{z} \wedge R(\omega \cdot \vec{t})$$

$$\overrightarrow{a_{M \in 1 \to 0}} = R\frac{d\omega}{dt}(\vec{z} \wedge \vec{n}) + (\omega^2 R) \cdot (\vec{z} \wedge \vec{t}) = R\frac{d\omega}{dt}(\vec{t}) - (\omega^2 R) \cdot (\vec{n})$$

$\frac{d\vec{n}}{dt} = \omega \cdot \vec{t}$? posons $\vec{n} = \cos(\omega \cdot t)\,\vec{x} + \sin(\omega \cdot t)\,\vec{y}$

$\frac{d\vec{n}}{dt} = -\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)\,\vec{x} + \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\,\vec{y}$. On remarque que $d\vec{n}$ est la rotation de $\vec{n}$ de $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\frac{d\vec{n}}{dt} = \omega \cdot \vec{t}$ C.Q.F.D

$$\overrightarrow{a_{M \in 1 \to 0}} = R\frac{d\omega}{dt}(\vec{t}) - (\omega^2 R) \cdot (\vec{n}).$$

Appliquons le P.F.D

$$\overrightarrow{F_{M \in 1 \to 0}} = m \cdot \overrightarrow{a_{M \in 1 \to 0}} = mR\frac{d\omega}{dt}(\vec{t}) - m\omega^2 R\,(\vec{n})$$

$$\overrightarrow{M_O\left(\overrightarrow{F_{M \in 1 \to 0}}\right)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{M \in 1 \to 0}} = R\vec{n} \wedge \left(mR\frac{d\omega}{dt}(\vec{t}) - m\omega^2 R\,(\vec{n})\right) = mR^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}(\vec{z})$$

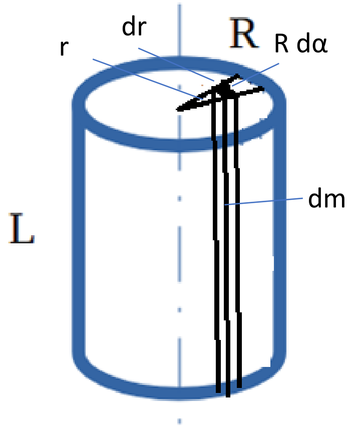
Posons $mR^2 = J_{OZ}$ l'inertie $(kg \cdot m^2)$ de la masse concentrée en un point par rapport à l'axe $\vec{z}$. Les deux théorèmes de la dynamique sont donc les suivants.

(Remarque : Les démonstrations ne sont pas à mémoriser mais les lois doivent l'être)

Les deux théorèmes de la dynamique se résument donc ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{\sum F_{\bar{S}\to S}} = m \cdot \overrightarrow{a_G} = \begin{pmatrix} m \cdot a_X \\ m \cdot a_y \\ m \cdot a_z \end{pmatrix}} \quad et \quad \boxed{\forall P \epsilon\ S, \sum \overrightarrow{\boldsymbol{M_P}(\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}})} = \begin{pmatrix} J_{OX} \cdot \dfrac{d\omega_x}{dt} & \vec{x} \\ J_{OY} \cdot \dfrac{d\omega_y}{dt} & \vec{y} \\ J_{OZ} \cdot \dfrac{d\omega_Z}{dt} & \vec{z} \end{pmatrix}}$$

Pour accroitre l'inertie d'un système il faut augmenter sa masse et éloigner cette masse de l'axe de rotation. Exemple de calcul d'un moment d'inertie. Si la masse n'est pas concentrée en un point, il nous faut calculer l'inertie du système.



La masse infinitésimale $dm = \rho \cdot r \cdot d\alpha \cdot dr \cdot dl$.
Par définition le moment d'inertie vaut

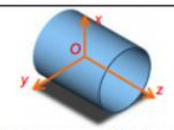
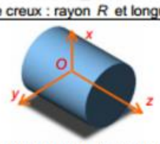
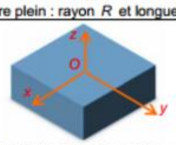
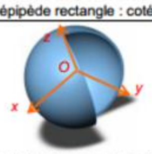
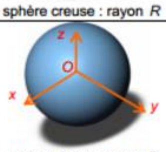
$$J_{OZ} = \int\int\int dm \times r^2$$

$$J_{OZ} = \int\int\int \rho \times r \times r^2 \times d\alpha \times dr \times dl$$

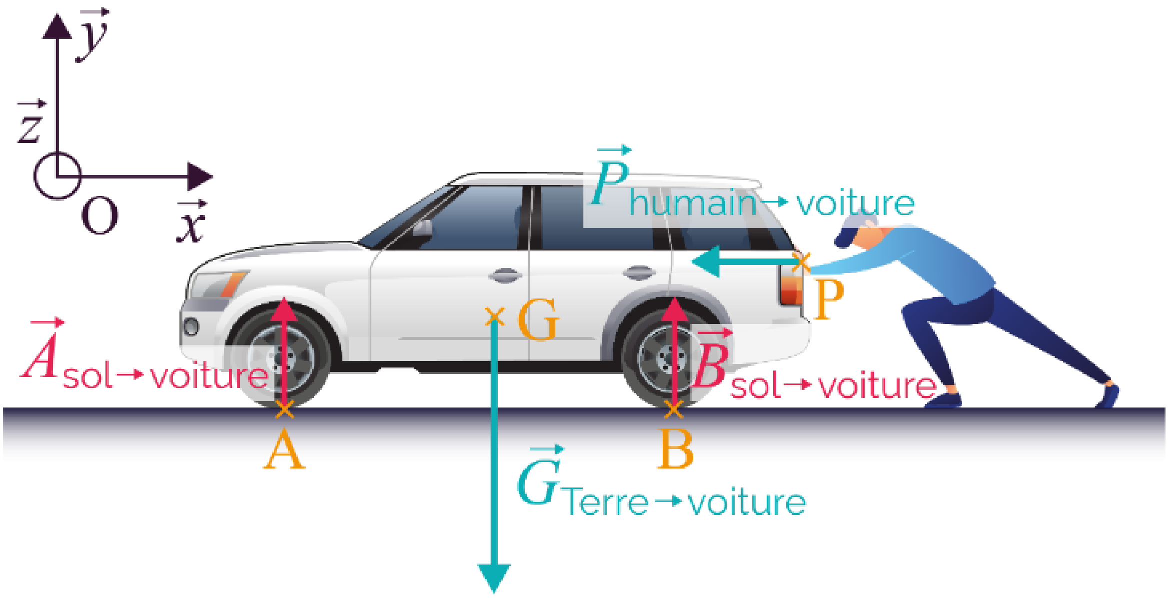
$$J_{OZ} = \rho \times \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 \times dr \right) \times d\alpha \times dL$$

donc $J_{OZ} = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 \times dr = 2\pi\rho L \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$. Or $M = \rho\pi R^2 L$ donc $\boxed{J_{OZ} = \frac{MR^2}{2}}$.

<u>Exemples : quelques matrices d'inertie en fonction de la forme et l'axe de rotation</u>

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 cylindre creux : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 cylindre plein : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 parallélépipède rectangle : coté a, b, c	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$
 sphère creuse : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 sphère pleine : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}$

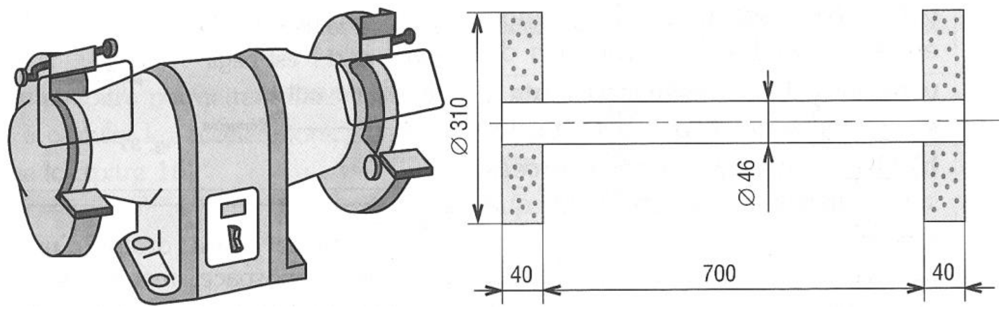
EXERCICE 0



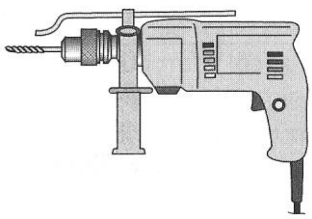
Une voiture de 1,6 tonnes a besoin d'être poussée pour pouvoir démarrer suite à un souci technique. L'accélération minimale pour démarrer est de 0,25 m.s^{-2}. Déterminer l'effort à exercer au point P en appliquant les théorèmes du P.F.D.

EXERCICE 1 : Un touret à meuler tourne à la vitesse de 3 000 tr/min. L'alimentation est coupée, la broche met 40 s pour s'arrêter.

- **Calculer** la décélération angulaire si celle-ci est supposée constante.
- **Déterminer** le moment d'inertie de l'ensemble et le couple résistant exercé par les paliers pendant la période d'arrêt (masse volumique des meules 2 500 kg.m^{-3} et de l'arbre 7 800 kg.m^{-3}).



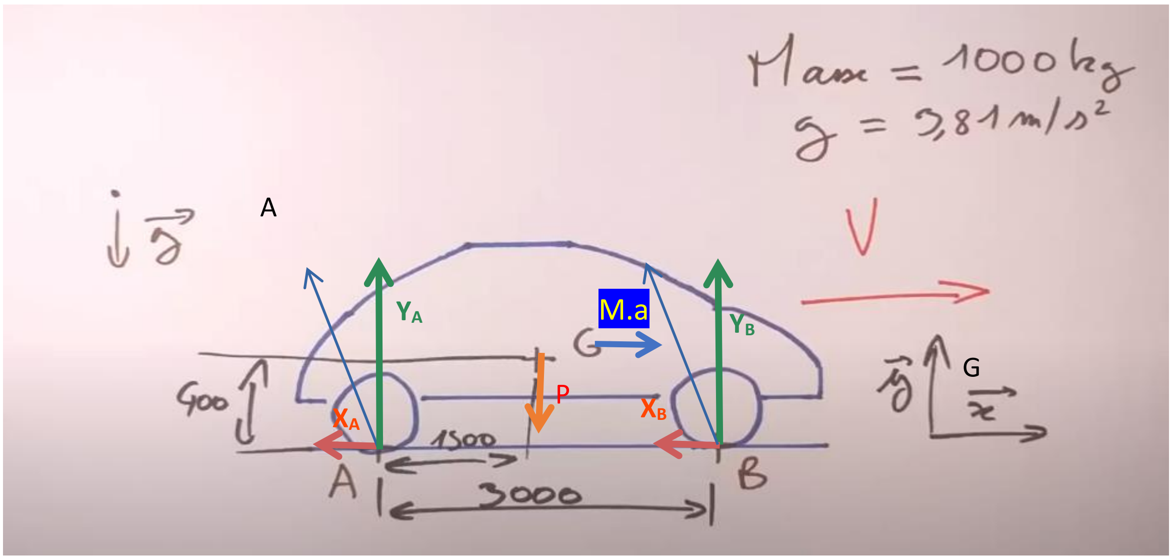
EXERCICE 2 : Le couple de démarrage, à vide, d'une perceuse est égal à 0,1 N.m. La vitesse de rotation atteinte est de 3 000 tr/min, le moment d'inertie des parties tournantes ramenées au mandrin est de 2.10^{-4} m^2.kg.



- **Calculer** l'accélération angulaire si celle-ci est supposée constante.
- **Combien** de tours faut-il au foret pour atteindre la vitesse de 3 000 tr/min et de temps pour y parvenir.

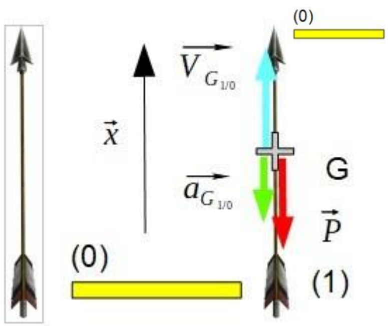
Exercice 3

Étude d'un cas concret - Un véhicule en freinage, moteur débrayé. $\|\vec{V}\| = 100\ Km/h$. L'accélération est négative (freinage). Son intensité se trouve à la limite du glissement. 2 roues motrices en A et A'. Le facteur de frottement est de 0,5.



A) Justifiez le sens et la direction des actions mécaniques.
B) Lister les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le véhicule dans le repère (G,x,y,z).
En statique la somme des forces est égale au torseur nul. Lorsqu'il y a une accélération, en dynamique donc, on ajoute une force d'inertie, opposée au sens de l'accélération. En effet si $\sum_{i=1}^{N} \quad \vec{F_i}(\bar{S} \rightarrow S) = M.\overrightarrow{a_G}$, il vient que $\sum_{i=1}^{N} \quad \vec{F_i}(\bar{S} \rightarrow S) - M.\overrightarrow{a_G} = \vec{0}$. Il suffit donc d'ajouter la force d'inertie, opposée à l'accélération pour se retrouver dans une étude statique.
C) Ecrire le théorème du « PFS » réduit au point G pour chaque action mécanique.
D) Déplacer chaque torseur au centre de gravité G et établir les relations entre chaque inconnue.
E) Résoudre le système et dégager la valeur de l'accélération projetée en x.
F) En déduire le temps de freinage et la distance de freinage.

EXERCICE 4 : On souhaite connaître la vitesse minimale d'éjection d'une flèche de trente grammes tirée verticalement à l'arc pour atteindre une cible située à trente mètres plus haut que la flèche.



Q1. **Justifier** le schéma (1) proposé et dire ce que vous connaissez sur V_{fin}, $V_{début}$, x_{fin}, $x_{début}$, $t_{début}$.

Q2. **Appliquer** le principe fondamentale de la dynamique à la flèche. Quelle nous donne-t-elle ?

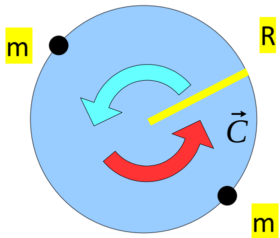
Q3. **Calculer**, en posant les hypothèses nécessaires, l'accélération de la flèche par rapport au sol.

Q4. **Calculer** la vitesse d'éjection de la flèche $V_{début}$ et la durée $t_{fin}-t_{début}$ du parcours pour atteindre la cible, sachant que l'accélération est supposée constante.

Exercice 5 : On souhaite connaître la puissance que doit fournir le scooter pour éjecter les cobayes.

L'accélération du tourniquet doit être $\gamma = d\Omega/dt = \frac{4}{5}\pi \ rad \cdot s^{-2}$,
le rayon du tourniquet est $R=1$ m , la vitesse minimale est $\omega=4\pi \ rad \cdot s^{-1}$, la masse de chaque cobaye est $m=80$ kg .

$\vec{\gamma}$



Q5. **Appliquer** le principe fondamentale de la dynamique au tourniquet.
Q6. **Calculer**, en posant les hypothèses nécessaires, le couple du scooter sur le tourniquet.
Q7. **Calculer** la puissance minimale en W en CV (1CV = 734 W) à fournir au tourniquet. **Conclure**

Exercice 6 : On souhaite simuler sur un « home-trainer » l'effort à fournir lors d'une accélération d'une épreuve de sprint en cyclisme sur piste.

Hypothèses :

La course s'effectue sur 3 tours d'une piste de 250 m de long :

1er tour : les coureurs se jaugent à vitesse quasi nulle pendant une durée indéterminée,

2ème tour : ils accélèrent de façon linéaire pendant 20 s,

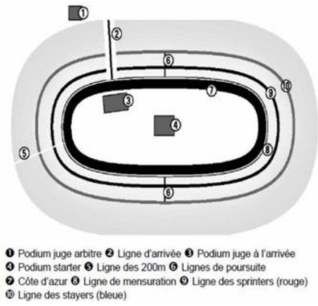
3ème tour : s'effectue à vitesse constante pendant 10 s.

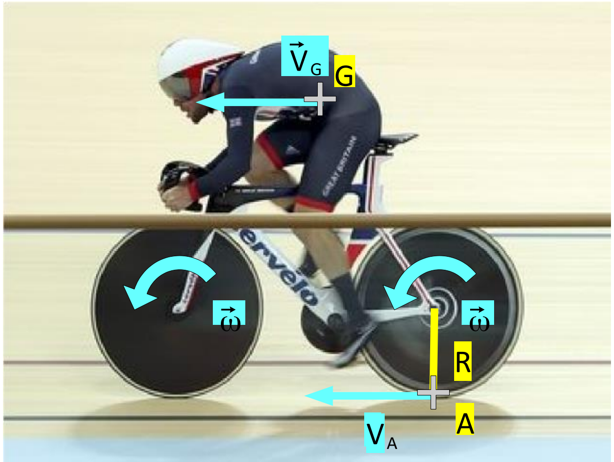
La masse du cycliste est de 90 kg, celle du vélo 7kg.

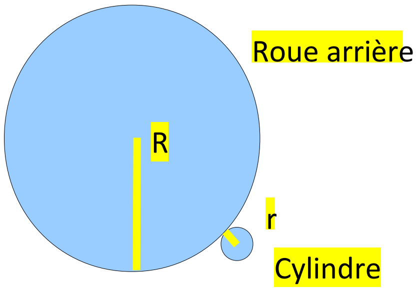
L'inertie d'une roue est de 0,02 kg·m².Le diamètre des roues est de 70 cm et celui du cylindre du « home-trainer » est de 10 cm.

On néglige l'inertie liée au mouvement du cycliste.

Exercice 7 :







La vitesse du cylindre dépend du rapport de R et r.

Q8. **Exprimer** l'énergie cinétique du cycliste, du vélo, **des** roues.

> **Exprimer** chaque énergie cinétique en fonction de la vitesse de rotation des roues.
> **Exprimer** l'énergie cinétique totale en fonction de la vitesse de rotation des roues.

Q9. **Exprimer** l'énergie cinétique de la roue arrière sur le « home-trainer ».

> **Exprimer** l'énergie cinétique du cylindre du « home-trainer » en fonction de la vitesse de rotation de la roue arrière du vélo.

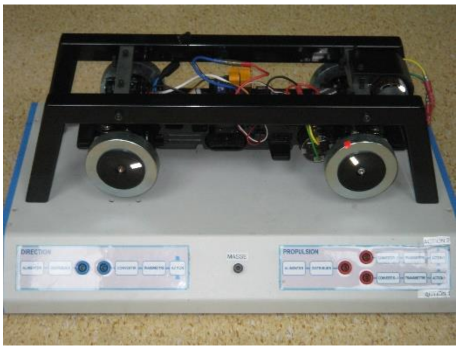
Q10.**Calculer** l'inertie du cylindre à placer sur le « home-trainer » qui équivaut à l'inertie de l'ensemble cycliste/vélo-roues lorsque le vélo est en translation. **En déduire** sa masse.

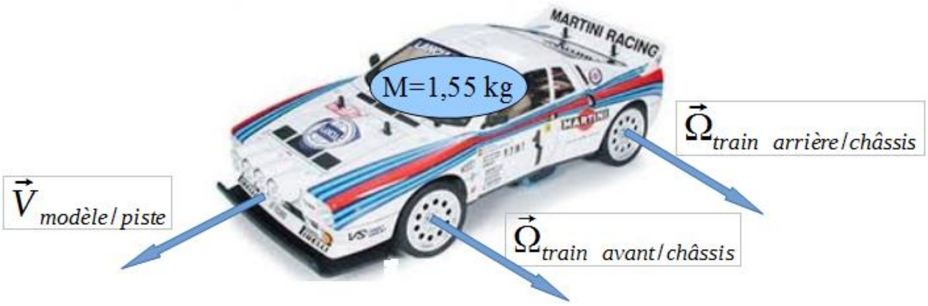
Q11. **Calculer** lors du second tour l'accélération et la vitesse maximale du vélo.

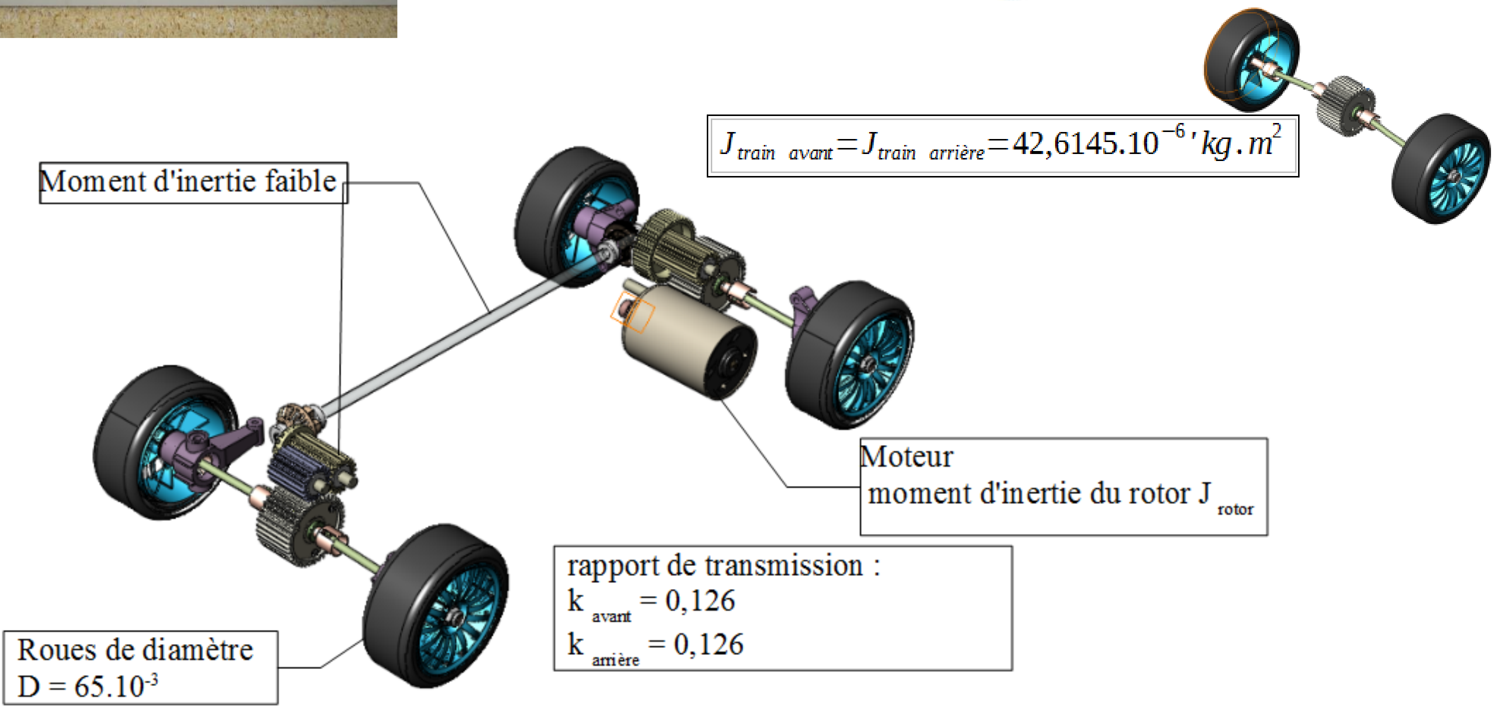
Q12.**Calculer** lors du troisième tour la vitesse moyenne.

Exercice 8 : On désire pratiquer des tests directement sur le modèle réduit en le disposant sur un banc test. Afin de simuler le comportement du modèle réduit, on dispose :

- D'un volant d'inertie 1 de moment d'inertie J_1 rapporté sur l'axe moteur isolé qui est destiné à simuler l'inertie de l'ensemble du modèle réduit.
- Des volants d'inertie 2 de moment d'inertie J_2 rapportés sur les axes des roues à la place des roues motrices destinés à simuler l'inertie de la masse du modèle réduit en translation.







Remarque : pour faciliter la compréhension, on prendra les rendements de la chaîne d'énergie de 100 %.

Rappel : énergie cinétique :

- Cas d'un solide S_1 de masse **m** en mouvement de translation à la vitesse **V** :
  - $Ec_{S1} = ½·m·V²$
  - Cas d'un solide S_2 de moment d'inertie **J** en mouvement de rotation à la vitesse angulaire **ω** : $Ec_{S2} = ½·J·ω²$

Cas d'un système de solides : $Ec_{Système} = Ec_{S1} + Ec_{S2} + ...$
Hypothèses : moments d'inertie des roues dentées et des arbres de transmission négligés.

Calcul du moment d'inertie J1 équivalent du volant rapporté sur l'arbre du moteur isolé.

- **Exprimer** l'énergie cinétique des différents éléments séparés de la voiture : arbre moteur en rotation, train avant en rotation, train arrière en rotation, voiture en translation.

- **Exprimer** tout en fonction de la vitesse de rotation du moteur Ω_{mot}.

- **Exprimer** l'énergie totale accumulée par la voiture lancée à une vitesse V.

- **Exprimer** littéralement l'énergie cinétique du moteur isolé lancé à la même vitesse que le moteur de la voiture, il est muni de son volant d'inertie de moment d'inertie J_1.

- **Comparer** les expressions et en déduire la relation permettant de déterminer le moment d'inertie équivalent J_1.

- **Calculer** J_1.

Calcul du moment d'inertie J2 équivalent du volant rapporté sur l'axe de la roue.

Quand la voiture est sur le banc, on cherche simuler les conditions sur route. Il faut donc faire « croire » au moteur que la voiture avance, c'est à dire lui donner une charge similaire à celle de la voiture en mouvement. Pour cela on va dimensionner des roues spéciales.

Remarque : L'inertie de la masse des roues motrices en rotation (Jantes et pneumatiques) sera négligée dans la suite de cette étude.

- **Exprimer** l'énergie cinétique de la voiture lancée à la vitesse V.

- **Répartir** cette énergie sur chacune des roues motrices.

- **Exprimer** l'énergie cinétique d'un volant d'inertie 2.

- **Déduire** le moment d'inertie J_2 .

Rôle de la transmission.

- **Comparer** les moments d'inertie calculés précédemment.

- **Conclure** sur le rôle de la transmission.