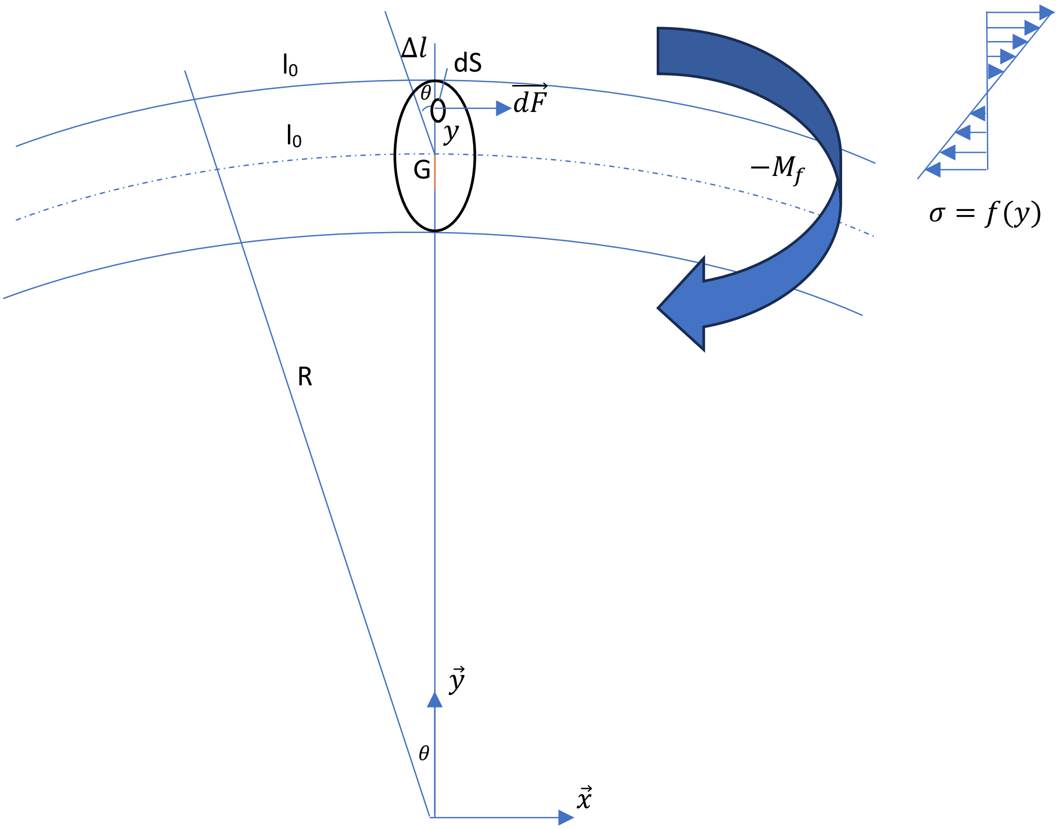
Contrainte en flexion



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{y \cdot \theta}{R.\theta} = \frac{y}{R} \text{ donc } \boxed{\sigma = y \cdot \frac{E}{R}}$$

La norme du moment en G, projeté sur $\vec{z}$ de la force $\overrightarrow{dF}$ vaut $\left\|\overrightarrow{dM_G(\overrightarrow{dF})}\right\| = \left\|\overrightarrow{dF}\right\| \cdot y = \sigma \cdot dS \cdot y$.

La somme de ces moments se nomme le moment fléchissant M_f.

$$\left\|\overrightarrow{dM_G(\overrightarrow{dF})}\right\| = \left\|\overrightarrow{dF}\right\| \cdot y = y \cdot \frac{E}{R} \cdot dS \cdot y = \frac{E}{R} \cdot y^2 \cdot dS.$$

$$M_f = \iint_S \left\|\overrightarrow{dM_G(\overrightarrow{dF})}\right\| = \frac{E}{R} \cdot \iint_S y^2 \cdot dS.$$

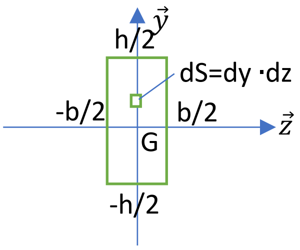
$\iint_S y^2 \cdot dS$ se nomme par définition moment quadratique I_{GZ}.

Il vient que $M_f = \frac{E}{R} \cdot I_{GZ.}$ Comme $\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}$, $M_f = -\frac{\sigma}{y} \cdot I_{GZ.}$

Donc $\boxed{\sigma\ (MPa) = -\frac{M_f(N.mm)}{I_{GZ}/y(mm4/mm)}}$. Comme en traction la condition de résistance implique que $\boxed{\sigma \leq \frac{R_e}{s}}$.

σ est la contrainte en MPa ;
M_f est le moment fléchissant en N·mm ;
I_{GZ} est le moment quadratique de la section en mm^4;
y est l'ordonnée de la fibre par rapport à la fibre neutre en mm.

Moment quadratique



Quelle est le moment quadratique I_{GZ} d'une poutre à section rectangulaire de base b et de hauteur h ?

$$I_{GZ} = \iint_S y^2 \cdot dS = \iint_S y^2 \cdot dy \cdot dz = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \right) dz$$

$$\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \left[\frac{(\frac{h}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{h}{2})^3}{3}\right] = \left[\frac{h^3}{24} - \frac{-h^3}{24}\right] = \frac{h^3}{12},$$

$$\text{donc } I_{GZ} = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h^3}{12}\right) dz = \left(\frac{h^3}{12}\right) \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \left(\frac{h^3}{12}\right) [z]_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \left(\frac{h^3}{12}\right) \left[\frac{b}{2} - \frac{-b}{2}\right] = \left(\frac{b \cdot h^3}{12}\right).$$

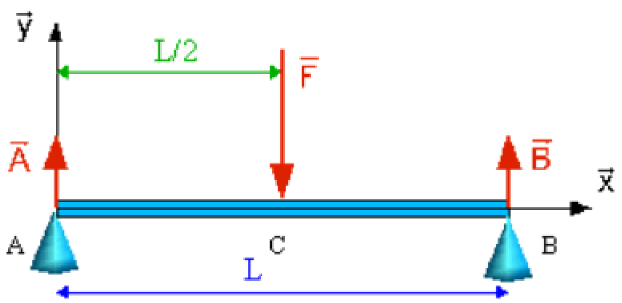
En flexion la hauteur de la poutre est bien plus déterminante que la longueur de la base. On plie plus facilement une règle sur la petite hauteur que sur la grande.

Section circulaire $I_{GZ}=\pi \cdot \frac{D^4}{64}$; Section rectangulaire $I_{GZ}=\frac{b \cdot h^3}{12}$; Section carrée $I_{GZ}=\frac{a^4}{12}$.

Déformée

Le P.F.S permet d'écrire A = B = $F/_2$

Nous avons vu que $M_f = \frac{E}{R} \cdot I_{GZ}$ or $\frac{1}{R} = y''$ donc $M_f = E \cdot I_{GZ} \cdot y''$



$$M_f = E \cdot I_{GZ} \cdot y''$$

$$E \cdot I_{GZ} \cdot y'' = \frac{F}{2} \cdot x$$

$$\frac{2}{F} \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot (y'') = x$$

$$\frac{2}{F} \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot (y') = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\frac{2}{F} \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot (y) = \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot (x) + C_2$$

En C la déformée est maximale donc $y'(L/2) = 0$.

$\frac{2}{F} \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot (y') = \frac{x^2}{2} + C_1$ donc $0 = \frac{(L/_2)^2}{2} + C_1$ donc $C_1 = \frac{-L^2}{8}$.

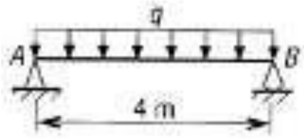
En A $y(0) = 0$. Donc $C_2 = 0$.

$\frac{2}{F} \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot (y) = \frac{x^3}{6} + \frac{-L^2}{8} \cdot (x)$ donc $y = \left(\frac{F}{2 \cdot E \cdot I_{GZ}}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{6} + \frac{-L^2}{8} \cdot (x)\right)$.

$$y_C = y(L/2) = \left(\frac{F}{2 \cdot E \cdot I_{GZ}}\right) \cdot \left(\frac{(L/2)^3}{6} + \frac{-L^2}{8} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)\right) = \left(\frac{F}{2 \cdot E \cdot I_{GZ}}\right) \cdot \left(\frac{L^3}{48} - \frac{3L^3}{48}\right) = \frac{-F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}}$$

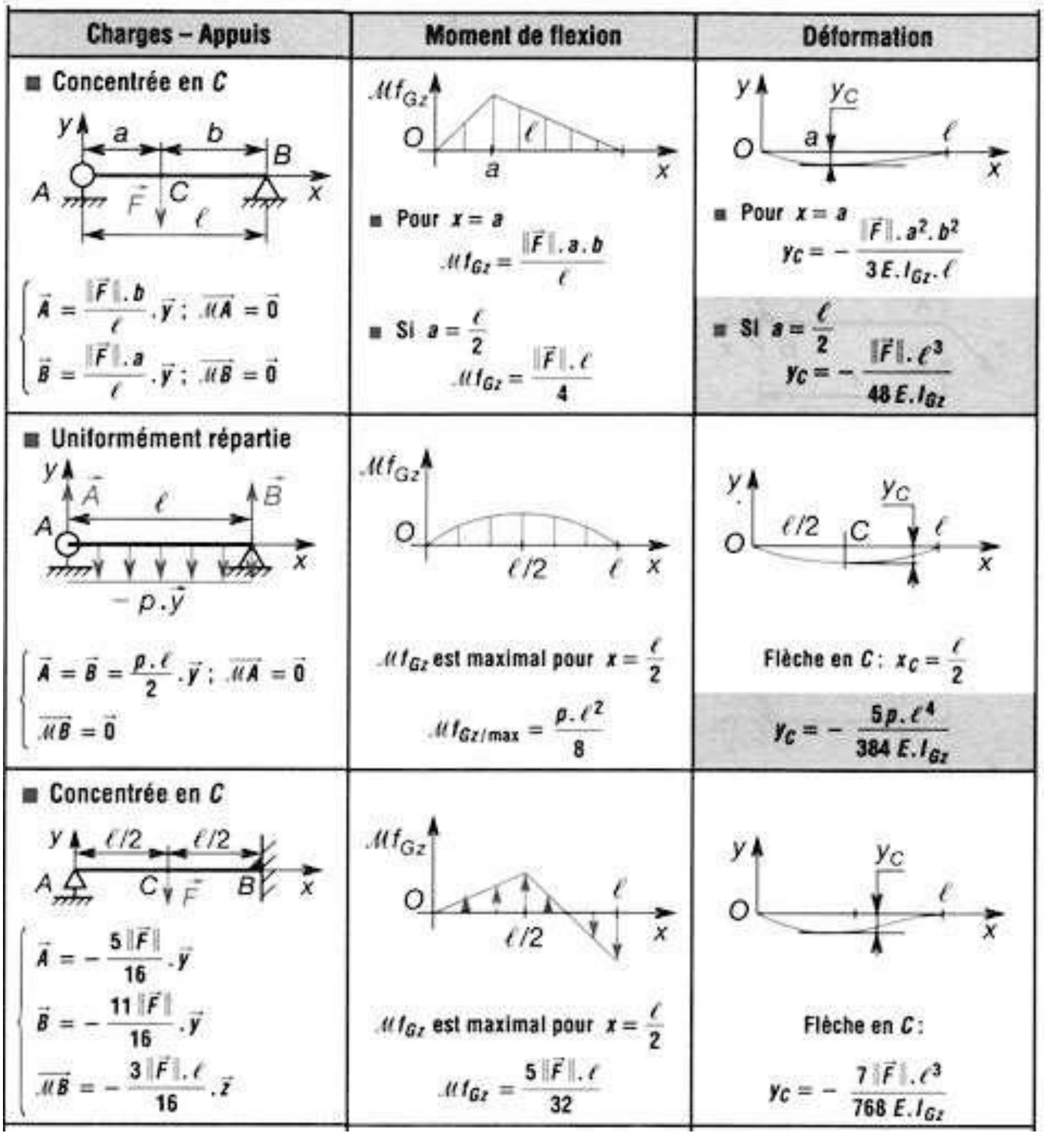
Exercices

Un plancher est soutenu par une poutre IPN. Le moment de flexion maxi, situé au milieu de la poutre, vaut est de 5000 Nm. La poutre est un IPN 200 de moment d'inertie 2000 cm4. L'IPN est en acier S235 (Re=235 Mpa), on prendra un coefficient de sécurité de 2. Calculez la contrainte en flexion.



Le tablier d'un petit pont est modélisé par la figure ci-contre. Ce pont est réalisé avec deux IPN100 parallèles.(Moment d'inertie IPN100 : I=171 cm4). La charge est de q=250 daN/m. L'IPN est en acier S235 (Re=235 Mpa), on prendra un coefficient de sécurité de 2.

a) A partir du formulaire, identifiez le cas (1,2 ou 3) le plus proche de l'énoncé. Précisez le type de chargement, et d'appuis.
b) Que vaut le moment de flexion maxi, où est-il situé ?
c) Calculez la contrainte en flexion. Les 2 IPN 100 sont-ils bien choisi ?
d) On change d'IPN pour des IPN 160 (Moment d'inertie 870 cm4), calculez la flèche du pont.



Charges – Appuis	Moment de flexion	Déformation
■ Concentrée en C $\vec{A} = \frac{\|\vec{F}\|.b}{\ell}.\vec{y}$; $\vec{\mathcal{M}A} = \vec{0}$ $\vec{B} = \frac{\|\vec{F}\|.a}{\ell}.\vec{y}$; $\vec{\mathcal{M}B} = \vec{0}$	■ Pour $x = a$ $\mathcal{M}f_{Gz} = \frac{\|\vec{F}\|.a.b}{\ell}$ ■ Si $a = \frac{\ell}{2}$ $\mathcal{M}f_{Gz} = \frac{\|\vec{F}\|.\ell}{4}$	■ Pour $x = a$ $y_C = -\frac{\|\vec{F}\|.a^2.b^2}{3E.I_{Gz}.\ell}$ ■ Si $a = \frac{\ell}{2}$ $y_C = -\frac{\|\vec{F}\|.\ell^3}{48E.I_{Gz}}$
■ Uniformément répartie $\vec{A} = \vec{B} = \frac{p.\ell}{2}.\vec{y}$; $\vec{\mathcal{M}A} = \vec{0}$ $\vec{\mathcal{M}B} = \vec{0}$	$\mathcal{M}f_{Gz}$ est maximal pour $x = \frac{\ell}{2}$ $\mathcal{M}f_{Gz/max} = \frac{p.\ell^2}{8}$	Flèche en C : $x_C = \frac{\ell}{2}$ $y_C = -\frac{5p.\ell^4}{384E.I_{Gz}}$
■ Concentrée en C $\vec{A} = -\frac{5\|\vec{F}\|}{16}.\vec{y}$ $\vec{B} = -\frac{11\|\vec{F}\|}{16}.\vec{y}$ $\vec{\mathcal{M}B} = -\frac{3\|\vec{F}\|.\ell}{16}.\vec{z}$	$\mathcal{M}f_{Gz}$ est maximal pour $x = \frac{\ell}{2}$ $\mathcal{M}f_{Gz} = \frac{5\|\vec{F}\|.\ell}{32}$	Flèche en C : $y_C = -\frac{7\|\vec{F}\|.\ell^3}{768E.I_{Gz}}$